

Lagrangesche Identität

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $z_k, w_k \in \mathbb{C}, k = 1, \dots, n$. Beweisen Sie die sogenannte LAGRANGESche Identität

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k w_k \right|^2 = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \sum_{k=1}^n |w_k|^2 - \sum_{1 \leq l < k \leq n} |z_l \bar{w}_k - z_k \bar{w}_l|^2$$

und daraus folgend die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung für komplexe Zahlen

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k w_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \sum_{k=1}^n |w_k|^2.$$